Листок 1. Топологические пространства и непрерывные отображения.

Задача 1. Метрики d_1 и d_2 на одном множестве M задают одну и ту же топологию, если

$\forall p \in M\, \forall \delta > 0\, \exists \delta' > 0 : D_{\delta',d_1}(p) \subset D_{\delta,d_2}(p)$

$\forall p \in M\, \forall \delta > 0\, \exists \delta'' > 0 : D_{\delta'',d_2}(p) \subset D_{\delta,d_1}(p)$

Задача 2. На лекции было определение 6 непрерывного отображения $f : X \to Y$ топологических пространств ($\forall U \in_Y \ f^{-1}(U) \in \tau_X$), а также $\varepsilon - \delta$-определение 7 непрерывного отображения метрических пространств. На лекции было доказано, что если отображение метрических пространств $f : X \to Y$ непрерывно в смысле $\varepsilon - \delta$-определения, то он непрерывно в смысле определения 6. Докажите следствие в обратном направлении, т.е. что из непрерывности отображения в смысле определения 6 следует его непрерывность в смысле $\varepsilon - \delta$-определения. Тем самым, определения 6 и 7 эквивалентны.

Задача 3. Пусть X — некоторое непустое множество. Придумайте метрику d на X, такую что индуцированная ею топология τ_d на X является дискретной.

Задача 4. Пусть X — некоторое топологическое пространство, а Y — открытое подмножество в нем. Покажите, что совокупность всех открытых подмножеств X, содержащихся в Y, является топологией на Y.

Задача 5. Докажите, что любой замкнутый шар в метрическом пространстве является замкнутым подмножеством в топологии, индуцированной метрикой.

Задача 6. Докажите, что любой открытый шар в метрическом пространстве является открытым подмножеством в топологии, индуцированной метрикой.

• Пусть X — топологическое пространство и $A \subset X$ какое-то подмножество. Определим *замыкание* A в X:

$$\overline{A} = \bigcap \{B \subseteq X : B \supseteq A \text{ и } B \text{ замкнуто в } X\},$$

внутренность A

$$\operatorname{Int} A = \bigcup \{U \subseteq X : U \subseteq A \text{ и } U \text{ открыто в } X\}.$$

Можете ли вы быстро объяснить, почему $\overline{A}$ замкнуто, а $\operatorname{Int} A$ открыто?

Можно думать, что $\overline{A}$ — это «наименьшее замкнутое подмножество, содержащее A», и $\operatorname{Int} A$ — это «наибольшее открытое подмножество, содержащееся в A».

Определимм *внешность* A

$$\operatorname{Ext} A = X \setminus \overline{A},$$

и *границу* A

$$\partial A = X \setminus (\operatorname{Int} A \cup \operatorname{Ext} A).$$

Множество A всегда содержит все свои внутренние точки и ни одной внешней точки и может содержать все, некоторые или ни одной из своих граничных точек.

Пусть X — топологическое пространство, а $A \subseteq X$ — некоторое подмножество.

Задача 7. a) Точка принадлежит $\operatorname{Int} A$ тогда и только тогда, когда она имеет окрестность, содержащуюся в A.

b) Точка принадлежит $\operatorname{Ext} A$ тогда и только тогда, когда она имеет окрестность, содержащуюся в $X \setminus A$.

c) Точка принадлежит ∂A тогда и только тогда, когда каждая её окрестность содержит как точку из A, так и точку из $X \setminus A$.

d) Точка принадлежит $\overline{A}$ тогда и только тогда, когда каждая её окрестность содержит точку из A.

Задача 8. $\overline{A} = A \cup \partial A = \operatorname{Int} A \cup \partial A$.

Задача 9. $\operatorname{Int} A$ и $\operatorname{Ext} A$ открыты в X, а $\overline{A}$ и ∂A замкнуты в X.

Задача 10. Следующие условия эквивалентны:

(a) A открыто в X;

(b) $A = \operatorname{Int} A$;

(c) A не содержит ни одной своей граничной точки;

(d) каждая точка A имеет окрестность, содержащуюся в A.

Задача 11. Следующие условия эквивалентны:

(a) A замкнуто в X;

(b) $A = \overline{A}$;

(c) A содержит все свои граничные точки;

(d) каждая точка $X \setminus A$ имеет окрестность, содержащуюся в $X \setminus A$.

• Точка $p \in X$ является *предельной точкой* A, если каждая окрестность p содержит точку из A, отличную от p (которая сама может принадлежать или не принадлежать A). Точка $p \in A$ называется *изолированной точкой* A, если p имеет окрестность U в X такую, что $U \cap A = \{p\}$.

Задача 12. Найдите предельные точки множества $\{1/n \ : \ n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$.

Задача 13. Найдите предельные точки канторова множества.

Задача 14. Пусть X — дискретное топологическое пространство. Покажите, что последовательность сходится в X тогда и только тогда, когда все ее члены, за исключением конечного числа, совпадают.

Задача 15. Пусть X — топологическое пространство, $A \subset X$, а (x_i) — последовательность точек в A, сходящаяся к точке $x \in X$. Покажите, что $x \in \overline{A}$.

Задача 16. (О пользе аксиом отделимости) Пусть Y — топологическое пространство с тривиальной топологией. Покажите, что каждая последовательность в Y сходится к каждой точке Y.

======

Задача 17. Является ли набор подмножеств

$$\mathcal{T}_5 = \{U \subseteq X : U = X \text{ или } X \setminus U \text{ бесконечно}\}$$

топологией на X.

Задача 18. Пусть X — топологическое пространство и $B \subset X$. Докажите, что

(a) $\overline{X \setminus B} = X \setminus \operatorname{Int} B$

(b) $\operatorname{Int}(X \setminus B) = X \setminus \overline{B}$

Задача 19. Пусть X — топологическое пространство, а $\mathcal{A}$ — совокупность подмножеств X. Докажите следующие включения:

a)
$$\bigcap_{A \in \mathcal{A}} \overline{A} \subseteq \overline{\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A}.$$

b)
$$\overline{\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A} \supseteq \bigcup_{A \in \mathcal{A}} \overline{A}.$$

c)
$$\operatorname{Int}\left(\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A\right) \subseteq \bigcap_{A \in \mathcal{A}} \operatorname{Int} A.$$

d)

$$\operatorname{Int}\left(\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A\right) \supseteq \bigcup_{A\in\mathcal{A}} \operatorname{Int} A.$$

Когда $\mathcal{A}$ — конечная совокупность, покажите, что равенство имеет место в (b) и (c), но не обязательно в (a) или (d).

Задача 20. Для каждого из следующих пунктов приведите пример отображения $f : X \to Y$, обладающего указанным свойством. При этом $X, Y \subseteq \mathbb{R}^2$, и оба рассматриваеются с топологиями, индуцированными топологией евклидовой метрики на $\mathbb{R}^2$.

(a) f открыто, но не замкнуто и не непрерывно.

(b) f замкнуто, но не открыто и не непрерывно.

(c) f непрерывно, но не открыто и не замкнуто.

(d) f непрерывно и открыто, но не замкнуто.

(e) f непрерывно и замкнуто, но не открыто.

(f) f открыто и замкнуто, но не непрерывно.

Задача 21. Пусть X и Y — топологические пространства, а $f : X \to Y$ — некоторое отображение.

(a) f непрерывно тогда и только тогда, когда $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ для всех $A \subseteq X$.

(b) f замкнуто тогда и только тогда, когда $f(\overline{A}) \supseteq \overline{f(A)}$ для всех $A \subseteq X$.

(c) f непрерывно тогда и только тогда, когда $f^{-1}(\operatorname{Int} B) \subseteq \operatorname{Int} f^{-1}(B)$ для всех $B \subseteq Y$.

(d) f открыто тогда и только тогда, когда $f^{-1}(\operatorname{Int} B) \supseteq \operatorname{Int} f^{-1}(B)$ для всех $B \subseteq Y$.

Задача 22. Докажите, что в хаусдорфовом пространстве каждая окрестность предельной точки содержит бесконечно много точек множества.

Задача 23. Пусть X — хаусдорфово пространство, $A \subseteq X$, и пусть A' —- множество предельных точек A. Докажите, что A' замкнуто в X.

Задача 24. Пусть D — дискретное пространство, T — пространство с тривиальной топологией, H — хаусдорфово пространство, а A — произвольное топологическое пространство.

(a) Покажите, что каждое отображение из D в A непрерывно.

(b) Покажите, что каждое отображение из A в T непрерывно.

(c) Покажите, что отображение из T в H непрерывно тогда и только тогда, когда оно постоянно.

Задача 25. Пусть $f, g : X \to Y$ — непрерывные отображения, а Y хаусдорфово. Покажите, что множество $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$ замкнуто в X. Приведите контрпример, если Y не хаусдорфово.

Задача 26. Пусть X — метрическое пространство. Решите следующие задачи:

(a) Определите открытые и замкнутые подмножества в X в терминах последовательностей и их пределов. Проверьте, что эта топология совпадает с топологией на X, заданной метрикой.

(b) Явно проверьте, что отображение $f : X \to Y$ двух метрических пространств является непрерывным в терминах последовательностей (как в определении на первом семинаре) тогда и только тогда, когда оно является непрерывным по ε, δ определению, тогда и только тогда, когда оно является непрерывным в терминах открытых/ замкнутых подмножеств.

Листок 2. Компактность и гомеоморфность.

Задача 1. Если (X, τ)— топологическое пространство, то подмножество $A \subseteq X$ компактно (в топологии $\tau|_A$) тогда и только тогда, когда каждое покрытие A открытыми подмножествами X имеет конечное подпокрытие.

Задача 2. Пусть (X, τ) — топологическое пространство, и $(x_i \in X \ : \ i \in \mathbb{N})$ последовательность точек, сходящаяся к точке $y \in X$. Тогда подмножество $A = \{x_i : i \in \mathbb{N}\} \cup \{y\} \subset X$ компактно (в топологии $\tau|_A$).

Задача 3. Пусть (X, τ) — хаусдорфово топологическое пространство, $x_0 \in X$ и $A \subseteq X$— некоторое компактное подмножество X, не содержащее точку x_0. Докажите, что существуют непересекающиеся открытые (в X) множества U, V, для которых $A \subset U$ и $x_0 \in V$. (т.е. для x_0 и A существуют непересекающиеся открытые окрестности).

Задача 4. Пусть (X, τ) — хаусдорфово топологическое пространство, $A, B \subseteq X$— некоторые непересекающиеся компактные подмножества X. Докажите, что существуют непересекающиеся открытые (в X) множества U, V, для которых $A \subset U$ и $B \subset V$. (т.е. для A и B существуют непересекающиеся открытые окрестности).

Задача 5. Пусть $f : X \to Y$— непрерывное отображение из компактного пространства X в хаусдорфово пространство Y.

Докажите, что f — замкнутое отображение (т.е. f отображает замкнутые подмножества в замкнутые).

Задача 6. Пусть K — компактное пространство и $f : K \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Докажите, что f достигает на K своих максимума и минимума.

Задача 7. Пусть непрерывная функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ имеет период $T > 0$, т.е. $f(x + T) = f(x)$ для любого $x \in \mathbb{R}$. Докажите, что тогда для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ уравнение $f(x + \alpha) = f(x)$ имеет решение.

Задача 8. Пусть (X, d) — метрическое пространство. Докажите, что:

(a) подпространство $K \subset X$ компактно тогда и только тогда, когда у любой последовательности точек (x_i) в K есть сходящаяся подпоследовательность с пределом в K;

(b) если подпространство $K \subset X$ компактно, то оно замкнуто и ограничено;

(c) докажите, что обратное утверждение к предыдущему пункту, вообще говоря, не верно;

(d) n-мерный куб $I^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid 0 \leq x_i \leq 1 \ \forall i\} \subset \mathbb{R}^n$ компактен;

(e) подпространство $K \subset \mathbb{R}^n$ компактно только и только тогда, когда K замкнуто и ограничено в $\mathbb{R}^n$.

Задача 9. Пусть X, Y — топологические пространства, $f : X \to Y$ — гомеоморфизм и $A \subset X$ — подпространство. Докажите, что:

(a) $f(\operatorname{Int} A) = \operatorname{Int}\big(f(A)\big)$;

(b) $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$;

(c) $f(\partial A) = \partial f(A)$;

(d) $f(\operatorname{Ext}(A)) = \operatorname{Ext}\big(f(A)\big)$.

Задача 10. Пусть (X, d) и (X', d') — два метрических пространства и $f : X \to Y$ — изометрия, т.е.

$$d(x_0, x_1) = d'\big(f(x_0), f(x_1)\big)$$

для любых точек $x_0, x_1 \in X$. Докажите, что тогда f является гомеоморфизмом.

Задача 11. Докажите, что следюущие плоские фигуры гомеоморфны друг другу:

(a) плоскость $\mathbb{R}^2$;

(b) открытый квадрат $Int\ I^2 = \{(x, y);\ x, y \in (0, 1)\}$;

(c) открытая полоса $\{(x, y);\ x \in (0, 1)\}$;

(d) открытая полуплоскость $H = \{(x, y);\ y > 0\}$;
(e) открытая полуполоса $\{(x, y);\ x > 0,\ y \in (0, 1)\}$;
(f) открытый круг $\{(x, y);\ x^2 + y^2 < 1\}$;
(g) открытый угол $\{(x, y);\ x > y > 0\}$;
(h) плоскость с разрезом по лучу $\{(x, y);\ y^2 + |x| > x\}$;
(i) открытый сектор $\{(x, y);\ x^2 + y^2 < 1,\ x > y > 0\}$.

Задача 12. Докажите, что бесконечный «крест»

$$\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{|x|, |y| > 1\}$$

гомеоморфен квадрату без вершин $I^2 \smallsetminus \{(\pm 1, \pm 1), (\pm 1, \mp 1)\}$.

Задача 13. Докажите, что следующие плоские фигуры гомеоморфны друг другу:

(a) полуплоскость $\{(x, y) :\ x \geqslant 0\}$;
(b) квадрант $\{(x, y) :\ x, y \geqslant 0\}$;
(c) угол $\{(x, y) :\ x \geqslant y \geqslant 0\}$;
(d) полуоткрытая полоса $\{(x, y) :\ y \in [0; 1)\}$;
(e) квадрат без трёх сторон $\{(x, y) :\ 0 < x < 1,\ 0 \leqslant y < 1\}$;
(f) квадрат без стороны $\{(x, y) :\ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y < 1\}$;
(g) квадрат без вершины $\{(x, y) :\ 0 \leqslant x, y \leqslant 1\} \smallsetminus (1, 1)$;
(h) круг без одной граничной точки $\{(x, y) :\ x^2 + y^2 \leqslant 1,\ y \neq 1\}$;
(i) полукруг без диаметра $\{(x, y) :\ x^2 + y^2 \leqslant 1,\ y > 0\}$;
(j) круг без радиуса $\{(x, y) :\ x^2 + y^2 \leqslant 1\} \smallsetminus [0; 1]$;
(k) квадрат без половины диагонали $\{(x, y) :\ |x| + |y| \leqslant 1\} \smallsetminus [0; 1]$.

Задача 14. Докажите, что следующие плоские фигуры гомеоморфны друг другу:

(a) проколотая плоскость $\mathbb{R}^2 \smallsetminus (0, 0)$;
(b) проколотый открытый круг $\{(x, y) :\ 0 < x^2 + y^2 < 1\}$;
(c) кольцо $\{(x, y) :\ a < x^2 + y^2 < b\}$, где $0 < a < b$;
(d) плоскость без круга $\{(x, y) :\ x^2 + y^2 > 1\}$;
(e) плоскость без квадрата $\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(x, y) :\ x, y \in [0; 1]\}$;
(f) плоскость без отрезка $\mathbb{R}^2 \smallsetminus [0; 1]$;
(g) $\mathbb{R}^2 \smallsetminus \Delta$, где Δ — замкнутое ограниченное выпуклое множество с непустой внутренностью.

Задача 15. Докажите, что для подмножества $X \subset \mathbb{R}^2$ его дополнение $\mathbb{R}^2 \smallsetminus X$ гомеоморфно проколотой плоскости, если:

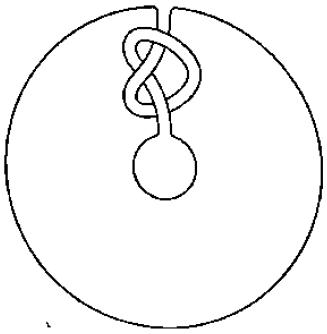
(a) X есть объединение нескольких отрезков с общим концом;
(b) X есть незамкнутая несамопересекающаяся конечнозвенная ломаная.

Задача 16. Докажите, что если K и L — конечные множества точек плоскости, состоящие из одинакового числа точек, то их дополнения гомеоморфны.

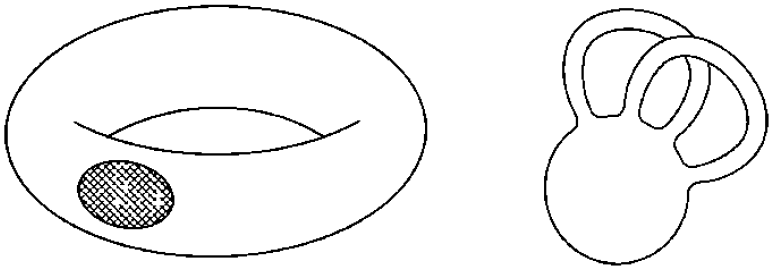
Задача 17. Пусть $D_1, \ldots, D_n \subset \mathbb{R}^2$ — попарно не пересекающиеся замкнутые круги. Докажите, что дополнение их объединения гомеоморфно плоскости без n точек.

Задача 18. В шаровом слое (промежутке между двумя концентрическими сферами) просверлили цилиндрическое отверстие, соединяющее граничные сферы. Докажите, что оставшаяся часть гомеоморфна шару D^3.

Задача 19. В шаровом слое просверлили отверстие, соединяющее граничные сферы и имеющее форму заузленной трубки (см. рисунок). Докажите, что оставшаяся часть гомеоморфна шару D^3.

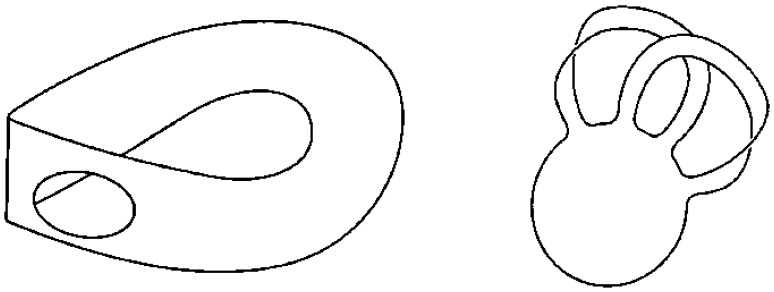


Задача 20. Докажите, что поверхности, показанные на следующем рисунке, гомеоморфны (и то, и другое — так называемая *ручка*).



Задача 21. Постройте два негомеоморфных пространства X и Y, для которых существуют непрерывные биекции $X \to Y$ и $Y \to X$.

1^{***} Докажите, что поверхности, показанные на следующем рисунке, гомеоморфны.



2^{***} Непустое множество $\Sigma \subset \mathbb{R}^2$ называется "звездой с центром в c", если Σ является объединением отрезков и лучей, одним их концов которых яляется точка c. Докажите, что если Σ открыто, то оно гомеоморфно открытому диску.

3^{***} Докажите, что $\mathbb{R}^3 \setminus S^1$ гомеоморфно $\mathbb{R}^3 \setminus (\mathbb{R}^1 \cup \{(1,1,1)\})$.