Листок 3. Булевы функции

1. а) Найдите значение булевой функции при всех значениях переменных:

$$x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus (x_1 \wedge x_2) \oplus (x_2 \wedge x_3) \oplus (x_3 \wedge x_1) \oplus (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3).$$

б) Для всех $n \geq 1$ найдите значение следующей булевой функции при всех значениях переменных:

$$\bigoplus_{S \neq \varnothing} \bigwedge_{i \in S} x_i = x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_n \oplus (x_1 \wedge x_2) \oplus (x_1 \wedge x_3) \oplus \ldots.$$

2. Назовем функцией голосования $\mathrm{MAJ}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ булеву функцию, значение которой совпадает с тем значением, которое принимает большинство переменных (если нулей и единиц среди переменных поровну, то $\mathrm{MAJ} = 0$).

Найдите многочлены Жегалкина для функций $\mathrm{MAJ}(x_1, x_2, x_3)$ и $\mathrm{MAJ}(x_1, x_2, x_3, x_4)$.

3. Рассмотрим булеву функцию от переменных $x_1, \ldots, x_5, y_1, \ldots, y_5$, заданную формулой:

$$\bigwedge_{i,j=1}^{5} (x_i \to y_j).$$

а) Сколько конъюнктов в СДНФ этой функции?
б) Найдите минимальное количество конъюнктов в ДНФ, представляющей эту функцию.
в) Докажите, что многочлен Жегалкина для этой функции состоит из нечётного числа мономов.

4. КНФ (*конъюнктивной нормальной формой*) называется конъюнкция дизъюнкций переменных или их отрицаний. Докажите, что любая булева функция может быть выражена в виде КНФ.

5. Докажите полноту системы, состоящей из одной функции *штрих Шеффера:* $x \mid y = \neg(x \wedge y)$.

6. Является ли полной система связок
а) $\{\wedge, \vee, \setminus\}$, где $x \setminus y$ равна $x \wedge \neg y$;
б) $\{\wedge, \vee, \to\}$;
в) $\{\neg, \equiv\}$, где $x \equiv y$ равна $(x \to y) \wedge (y \to x)$;
г) $\{\wedge, \vee, 0, 1\}$;
д) $\{\neg, \mathrm{MAJ}(x_1, x_2, x_3)\}$?

7*. Степенью многочлена Жегалкина называется максимальное число переменных, входящих в один его моном. Докажите, что многочлен Жегалкина от n переменных степени $k > 0$ принимает каждое из значений 0 и 1 по крайней мере на 2^{n-k} наборах.

8*. Размером ДНФ будем называть число вхождений переменных в нее. Каков минимальный размер ДНФ, задающей функцию $\mathrm{MAJ}(x_1, \ldots, x_n)$?

Домашнее задание 3

1. Найдите многочлен Жегалкина следующей функции:

$$f(x, y, z) = ((x \to y) \oplus z) \downarrow ((y \wedge \neg z) \equiv x),$$

где $x \downarrow y = \neg(x \vee y)$ — так называемая «стрелка Пирса».

2. Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_{2025})$ и $g(y_1, y_2, \ldots, y_{2025})$ — линейные булевы функции. Сколько конъюнктов содержит СДНФ булевой функции

$$h(x_1, x_2, \ldots, x_{2025}, y_1, y_2, \ldots, y_{2025}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_{2025}) \vee g(y_1, y_2, \ldots, y_{2025})?$$

3. Известно, что многочлен Жегалкина некоторой монотонной булевой функции f содержит моном $x_1 \wedge x_2$. Можно ли утверждать, что функция $(\neg f)$ образует полную систему булевых функций?

4. Решите систему уравнений на множества X, Y:

$$\begin{cases} A \triangle X = B \cup Y, \\ C \triangle X = B \cap Y. \end{cases}$$

Пояснение. Подразумевается, что множества A, B, C даны, а множества X, Y являются неизвестными подмножествами объединения $A \cup B \cup C$. В качестве ответа нужно явно выразить X, Y через A, B, C, используя стандартные теоретико-множественные операции.

5. Булева функция $f\colon \{0,1\}^{2025} \to \{0,1\}$ принимает значение 1 на наборе $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2025})$, если и только если $\alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_{2025}$ (биты сравниваются так же, как числа 0 и 1). Сколько мономов содержит многочлен Жегалкина данной функции?

6. Размером ДНФ будем называть число вхождений переменных в нее. Каков минимальный размер ДНФ, задающей функцию $x_1 \oplus \ldots \oplus x_n$?

7. Представьте функцию, заданную многочленом Жегалкина от переменных $x_1, \ldots, x_n$ как

$$\bigoplus_{|S| \text{ - четно, } S \neq \varnothing} \bigwedge_{j \in S} x_j = (x_1 \wedge x_2) \oplus \cdots \oplus (x_{n-1} \wedge x_n) \oplus (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge x_4) \oplus \ldots,$$

в виде ДНФ с как можно меньшим количеством конъюнктов. Какое минимальное число конъюнктов возможно?