Листок 4. Хроматическое число и хроматический многочлен графа

Если в задаче не сказано иного, то слово «граф» означает неориентированный граф без петель и кратных ребер.

1. Пусть R и S — бинарные отношения на множестве A из 2025 элементов, причём $R \circ S = A \times A$. Какое минимально возможное количество пар может быть в композиции $S \circ R$?

2. Найдите число таких (тотальных) функций $f\colon \{1, 2, \ldots, 2026\} \to \{1, 2, \ldots, 2026\}$, что отношение

$$\mathcal{R} = f \cup (f \circ f) \cup (f \circ f \circ f) \cup \ldots \cup (\underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{2025})$$

является отношением эквивалентности на множестве $\{1, 2, \ldots, 2026\}$.

3. Дан ориентированный граф G (без петель и кратных ребер), исходящие степени вершин которого не превосходят d. Докажите, что $\chi(G) \leqslant 2d + 1$. Под хроматическим числом ориентированного графа понимается хроматическое число соответствующего неориентированного графа, полученного удалением ориентации рёбер.

4. Дан граф, вершины которого нельзя правильно раскрасить в n цветов. Докажите, что в этом графе не менее $\binom{n+1}{2}$ рёбер.

5. Граф G получен из выпуклого n-угольника, разбитого непересекающимися диагоналями на треугольники (то есть вершины графа — вершины многоугольника, а рёбра — стороны и проведённые диагонали). Найдите его хроматический многочлен $\chi_G(x)$.

6. Вычислите хроматический многочлен $\chi_{C_n}(x)$ для простого цикла C_n на n вершинах.

7. а) Для любого связного графа G с n вершинами докажите неравенство $\chi_G(k) \leqslant k(k-1)^{n-1}$ при всех натуральных k.

б) Известно, что хроматический многочлен графа G для некоторого натурального n равен $\chi_G(x) = x(x-1)^{n-1}$. Можно ли утверждать, что G — дерево?

8. а) Пусть граф G имеет хроматический многочлен $\chi_G(x) = x^4 - 3x^3 + ax^2$. Найдите a.

б) Известно, что граф G имеет хроматический многочлен

$$\chi_G(x) = x^6 - 7x^5 + ax^4 - 17x^3 + bx^2,$$

где $a, b \in \mathbb{R}$. Найдите a и b.

(*Замечание. Предъявлять граф G не требуется — гарантируется, что он существует.*)

9*. Дан граф G с n вершинами. Докажите, что $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leqslant n + 1$, где $\overline{G}$ — дополнение графа G.

10*. Пусть G — связный граф на n вершинах. Докажите, что $(-1)^n \cdot \chi_G(x) < 0$ при $0 < x < 1$.

11*. Пусть $G = (V, E)$ — граф с множеством вершин V и множеством рёбер E. Для любого подмножества рёбер $T \subseteq E$ определим $c(T)$ как количество компонент связности графа (V, T) с теми же вершинами и множеством рёбер T. Докажите, что

$$\chi_G(x) = \sum_{T \subseteq E} (-1)^{|T|} \cdot x^{c(T)}.$$

Домашнее задание 4

Если в задаче не сказано иного, то слово «граф» означает неориентированный граф без петель и кратных ребер.

1. Обязательно ли композиция двух отношений эквивалентности является отношением эквивалентности?

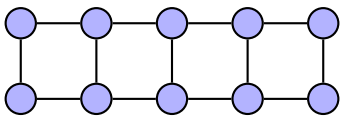
2. Верно ли, что для всякого бинарного отношения R на множестве $\mathbb{N}$ существует такое бинарное отношение S на множестве $\mathbb{N}$, что $R = S \circ S$?

3. Докажите, что $\chi(G) \cdot \chi(\overline{G}) \geqslant n$, где n — число вершин графа G, а $\overline{G}$ — его дополнение.

4. Известно, что граф G представим в виде объединения двух подграфов $G = G_1 \cup G_2$, причём пересечение этих подграфов $G_1 \cap G_2$ равно полному графу K_s на s вершинах. Докажите, что

$$\chi_G(x) = \frac{\chi_{G_1}(x) \cdot \chi_{G_2}(x)}{x(x-1)(x-2)\dots(x-s+1)}.$$

5. Рассмотрим граф L_n, являющийся объединением двух простых путей длины n ($n \geqslant 2$), соединенных поперечными ребрами. Пример такого графа для $n = 5$ изображен на рисунке ниже.



Вычислите хроматический многочлен $\chi_{L_n}(x)$, в зависимости от n.

6. Известно, что хроматический многочлен некоторого графа равен

$$x^7 - 11x^6 + ax^5 + bx^4 + 74x^3 - 24x^2 + c,$$

где $a, b, c \in \mathbb{R}$. Найдите a, b и c (приведите все возможные варианты и докажите, что других нет). Гарантируется, что как минимум один такой граф существует.

7. Неориентированный граф $G = (V, E)$ без петель и кратных ребер таков, что $|V| = 2025$, $|E| \geqslant 2026$. Кроме того, G связен и имеет ровно 8 остовных деревьев. Найдите хроматический многочлен $\chi_G(x)$. Приведите все возможные варианты и докажите, что других нет.